CAPÍTULO 7 ESFERA, CONO Y CILINDRO

7.1 LA ESFERA

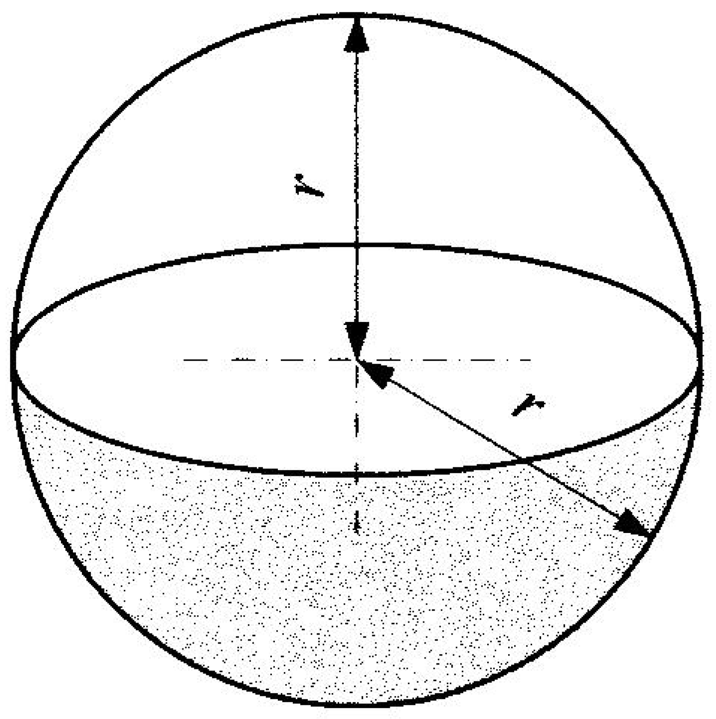

Figura 103

Es un sólido cuyos puntos sobre su superficie equidistan de un punto fijo llamado el centro de la esfera.

Si denotamos con r al radio de la esfera de la figura 103, su volumen viene dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

y su área superficial es:

$$A_S = 4\pi r^2$$

7.2 EL CILINDRO

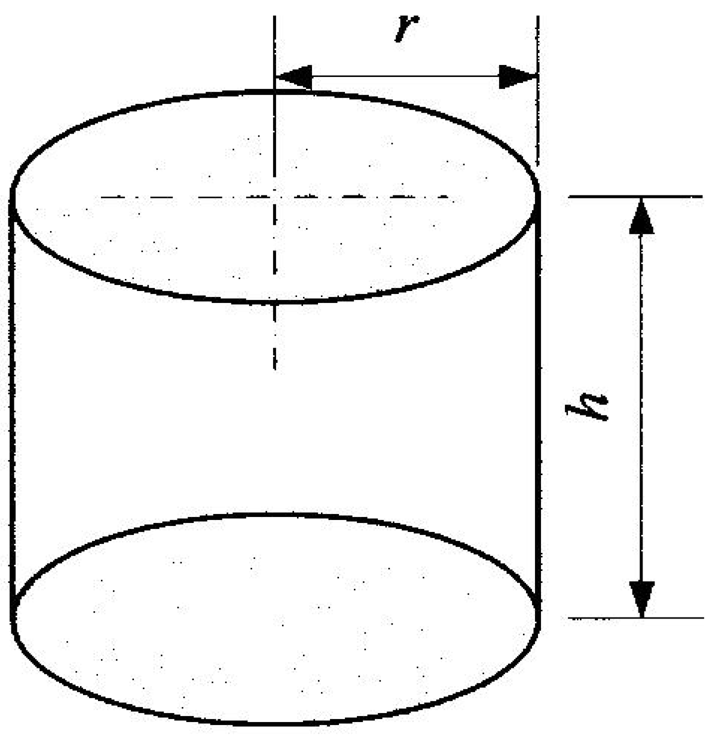

Figura 104

Es un sólido cuyas bases son círculos paralelos e iguales y sus secciones transversales son también círculos.

Volumen del cilindro
Es igual al producto del área de su base por su altura.

Si denotamos con r y h, el radio de la base y la altura del cilindro de la figura 104, respectivamente, el volumen de dicho cilindro viene dado por:

$$V = \pi r^2 h$$

Área superficial del cilindro
Es igual a la suma del área lateral más el área de los círculos de su base y tope.

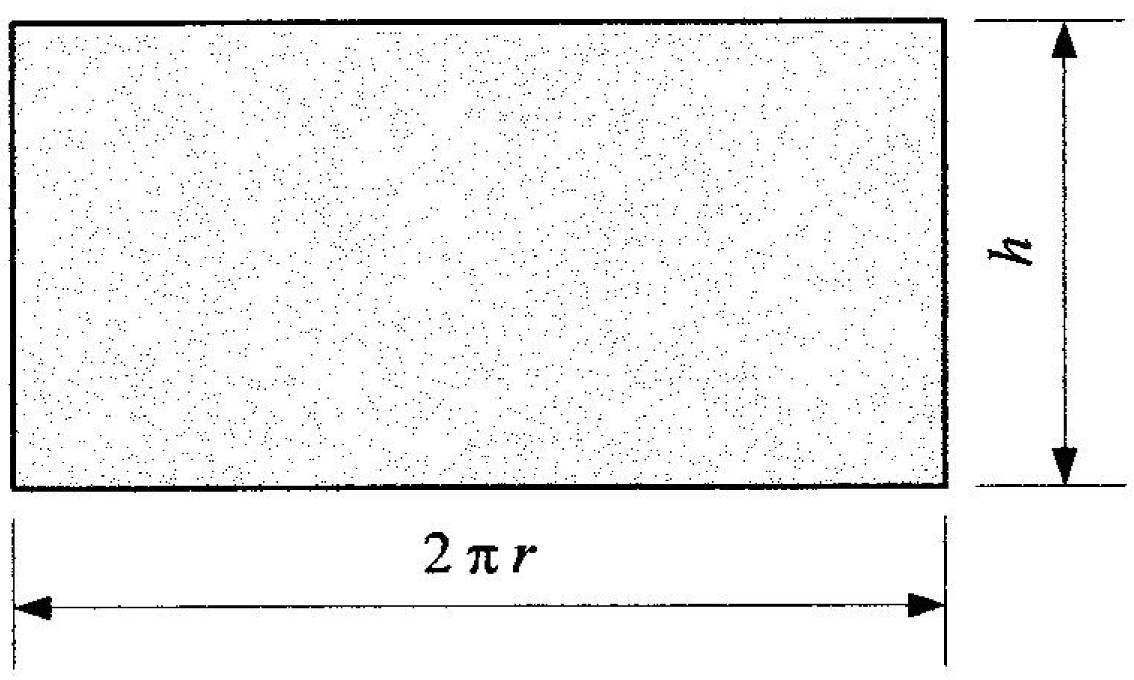

Figura 105

En la figura 105, hemos desenvuelto el cilindro de la figura 104. Nótese que el área lateral del cilindro es igual al área de un rectángulo, donde uno de sus lados tiene como longitud la altura del cilindro y el otro, el perímetro de la circunferencia de la base de dicho cilindro.

Por lo tanto, su área superficial es:

$$A_S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

EJEMPLO 1

Un fabricante de latas de conserva actualmente produce una lata cilíndrica de 2.5 cms. de radio y 8 cms. de alto. El desea producir una nueva lata que tenga la misma capacidad que la primera, pero solamente una altura de 2 cms. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener la nueva lata?

SOLUCIÓN:

Actualmente la capacidad de la lata es de:

$$V = \pi(2.5)^2(8) = 50\pi \text{ cm}^3$$

Dado que la nueva lata debe tener la misma capacidad que la primera, pero solamente 2 cms. de alto, nosotros planteamos:

$$50\pi = \pi r^2(2), \text{de donde } r = 5$$

por lo tanto, las dimensiones de la nueva lata son: radio de 5 cms. , altura de 2 cms.

7.3 EL CONO CIRCULAR

Es un sólido cuya base es un círculo y cuya superficie lateral termina en un punto llamado vértice.

Volumen del cono
Es igual a la tercera parte del producto del área de su base por su altura.

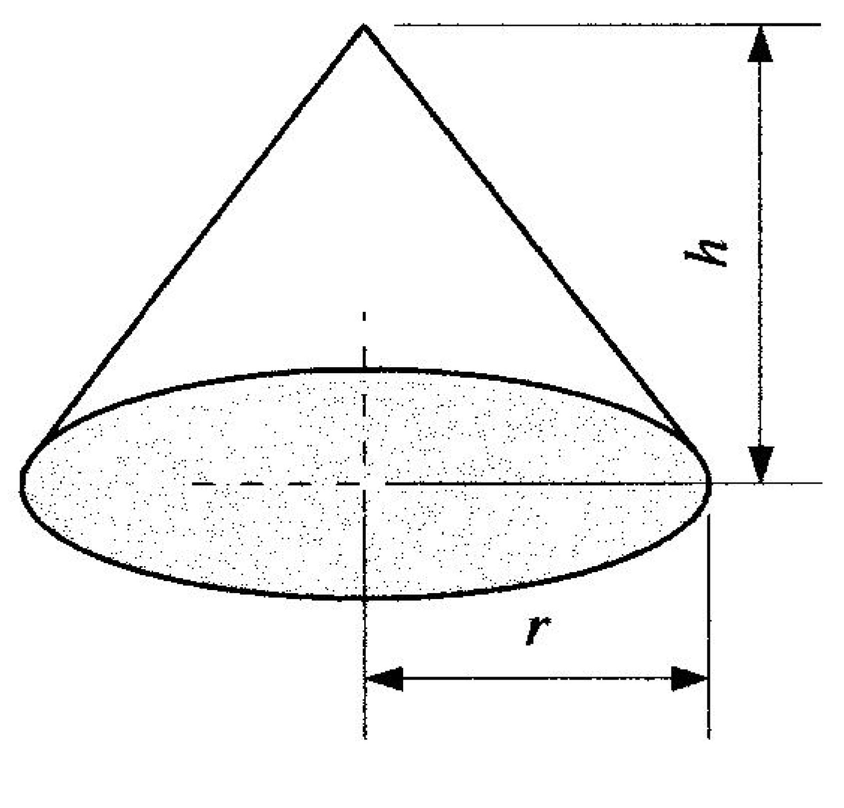

Figura 106

Si denotamos con r y h al radio del círculo de la base y la altura del cono de la figura 106, respectivamente, su volumen es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Área superficial del cono
Es igual a la suma de su área lateral más el área del círculo de su base.

El área superficial del cono de la figura 106, es:

$$A_S = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

EJEMPLO 2

Un tanque tiene la forma de un cono invertido de 2 metros de radio y 3 metros de altura (Vea la figura 107). El tanque inicialmente está vacío y en ese momento fluye agua a su interior a razón de 0.8 m³/min. A partir de ello, obtenga:

a) La capacidad del tanque.
b) El tiempo de llenado.
c) La altura para que el volumen de agua sea de $\frac{1}{2}\pi$ m^3.

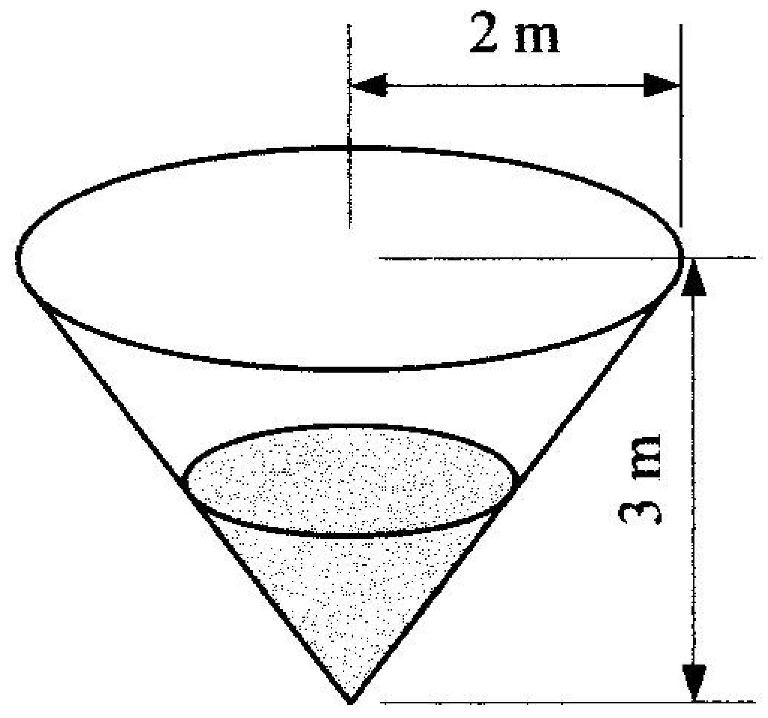

Figura 107

SOLUCIÓN:

a) Comenzamos determinando la capacidad del tanque, esto es:

$$V = \frac{1}{3}\pi(2^3)(3) = 4\pi$$

b) Dado que se llena a razón de 0.8 m³/min, el tanque estará lleno en unos $4\pi/0.8 \approx 15.7$ minutos.

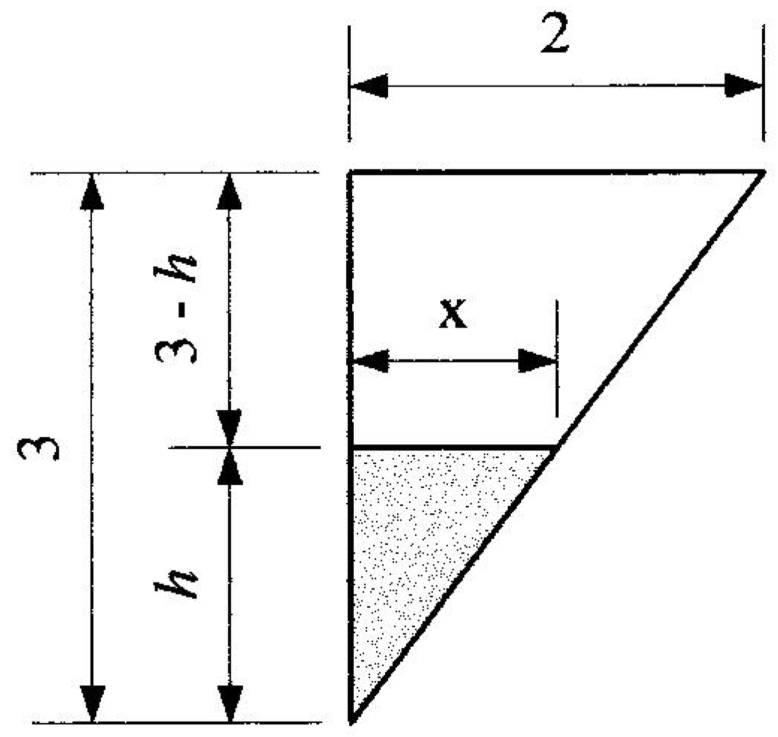

Figura 108

c) En la figura 108, observamos un corte del sólido en cuestión. Vemos que cuando la altura del nivel de agua es h, el radio del espejo de agua es x, y ellos se relacionan de acuerdo a la ecuación:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{h}, \text{de donde } x = \frac{2}{3}h$$

De allí que volumen de agua en todo momento sea

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}h\right)^2 h = \frac{4}{27}\pi h^3$$

Como el volumen debe ser de $\frac{\pi}{2}$ nosotros planteamos:

$$\frac{4}{27}\pi h^3 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{Ecuación original}$$

$$h^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{Simplificando}$$

$$h = \frac{3}{2} \qquad \text{Despejando}$$

De allí que la altura sea de 1.5 m.

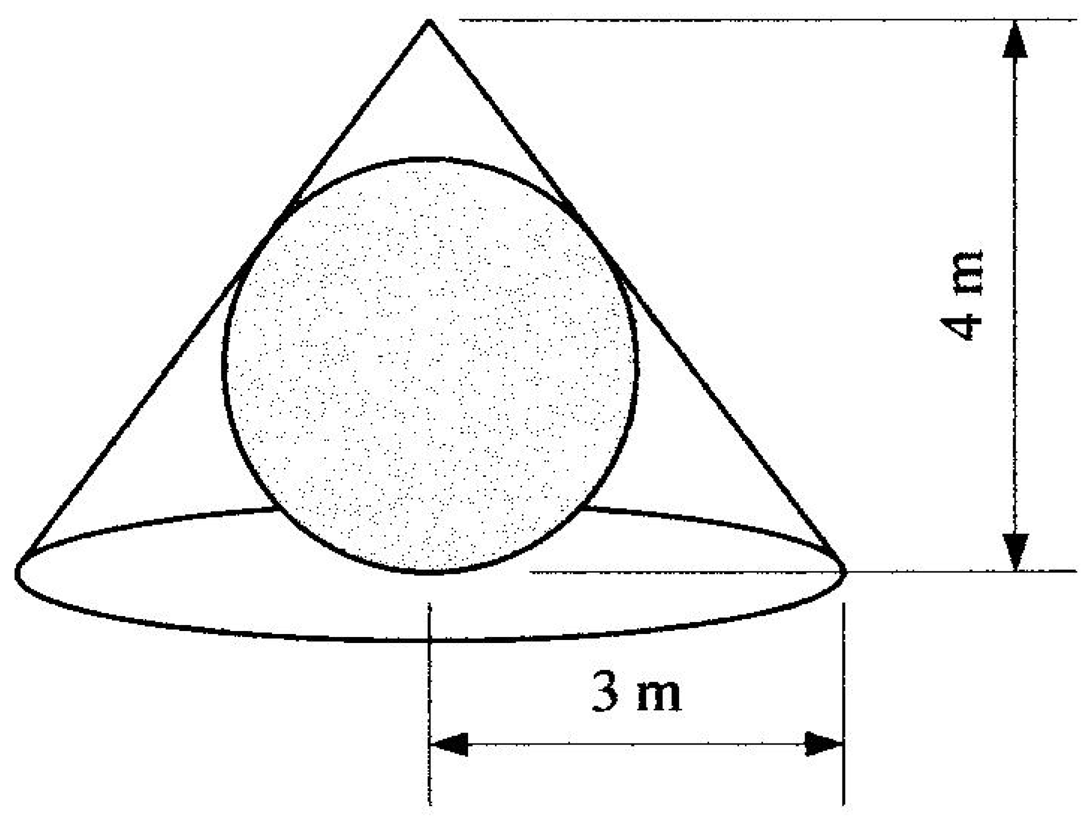

Figura 109

EJEMPLO 3

Un cono de tres (3) metros de radio y cuatro (4) metros de altura se circunscribe a una esfera. Calcule el volumen fuera de la esfera y dentro del cono.

SOLUCIÓN:

En la figura 110, se muestra un corte del sólido en cuestión. En la figura hemos denotado con *CD* la altura del cono, con *DB* el radio y con *E* al punto de tangencia.

Comenzamos calculando la longitud del segmento *CB*, esto es:

$$CB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

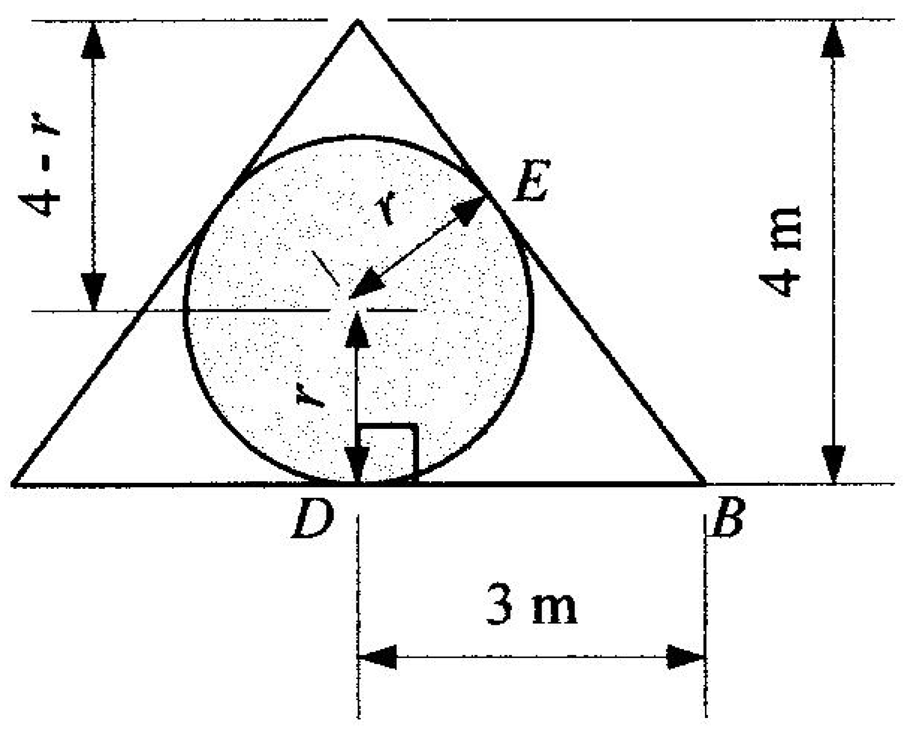

Figura 110

Luego advierta que el $\Delta\, CDB \sim \Delta\, CoE$, por lo tanto:

$$\frac{4-r}{5} = \frac{r}{3}, \text{de donde } r = \frac{3}{2}$$

De allí que el volumen pedido sea:

$$V = \frac{1}{3}\pi(3^2)(4) - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{15}{2}\pi$$

EJERCICIOS CAPÍTULO 7

1 – 3

Complete los enunciados con la información correcta.

1. Al sólido cuyos puntos sobre su superficie equidistan de un punto fijo llamado centro, se le llama: _________.

2. Al sólido cuyas bases son círculos paralelos e iguales y sus secciones transversales son también círculos, se le llama: _________.

3. Al sólido cuya base es un círculo y cuya superficie lateral termina en un punto llamado vértice, se le llama: _________.

4 – 8

Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, en cualquier caso justifique su respuesta.

4. Cuando un tanque cilíndrico se llena de agua, en todo momento el volumen de agua es un cilindro.

5. Cuando un cono se llena de agua en todo momento el volumen de agua es un cono.

6. Cuando un cono invertido se llena de agua en todo momento el volumen de agua es un cono.

7. Cuando una esfera se llena de agua en todo momento el volumen de agua es una esfera.

8. Cuando un cilindro se coloca en posición horizontal y se llena de agua en todo momento el área del espejo de agua es un rectángulo.

9. Una esfera tiene un volumen de 36π cm^3. Halle su radio.

10. Una esfera tiene el mismo volumen que un cubo de 2 cm de lado. Halle el radio de la esfera.

11. Un cilindro de 2 metros de radio y 3 metros de altura se encuentra en posición horizontal y posee agua hasta la mitad. En ese momento se coloca en posición vertical. Determine a qué altura llega el agua.

12. Un cilindro de 4 cm de radio tiene el mismo volumen que una esfera de 3 cm de radio. Halle la altura del cilindro.

13. Un cono de helado tiene 2 pulgadas de radio y 6 pulgadas de altura. En el se vierte una bola de helado de modo que la mitad de ella queda dentro del cono (Vea la figura 111). Halle el volumen de helado dentro del cono.

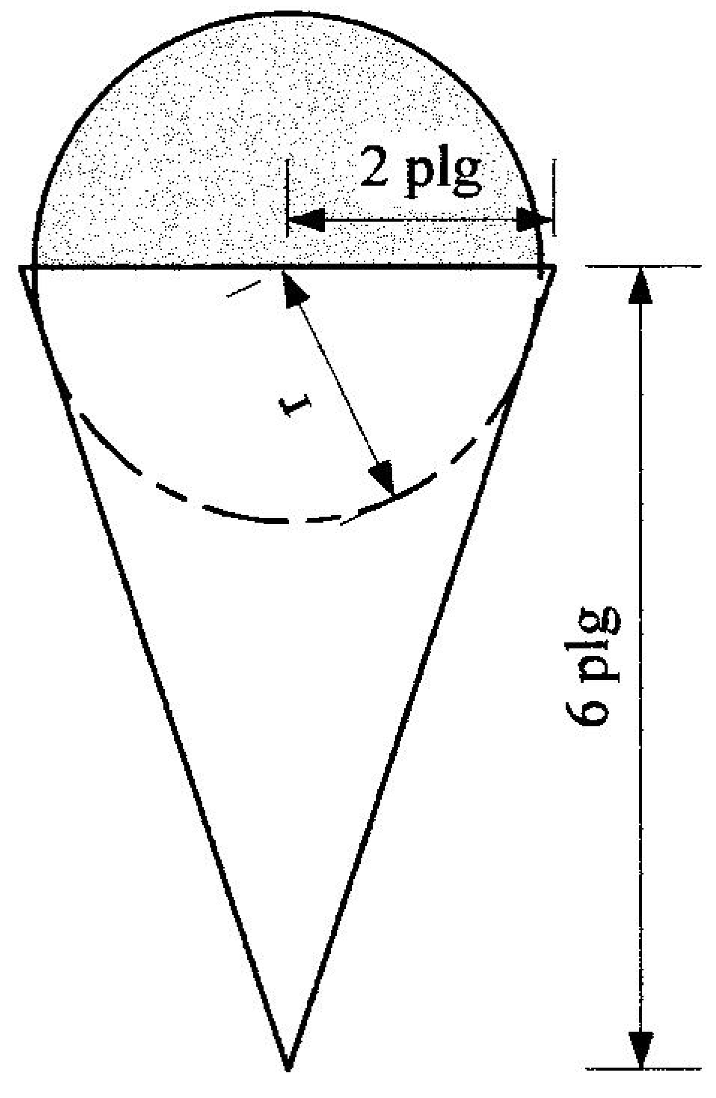

Figura 111

14. Imagine que la bola de helado del problema 13 se derrite. Determine si se cae o no el helado.

15. Un cono cuya altura es $\sqrt{3}$ veces su radio se circunscribe a una esfera de 1 metro de radio (Vea la figura 112). Halle el volumen fuera de la esfera y dentro del cono.

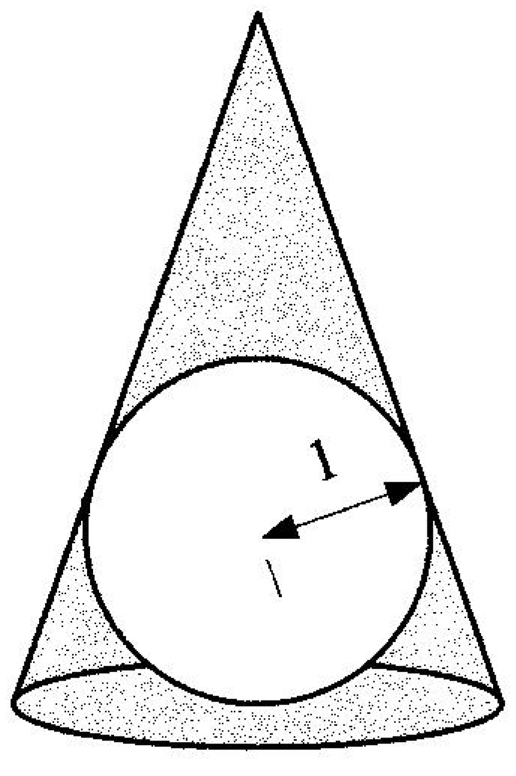

Figura 112

16. Un cono cuyo radio es igual a la mitad de su altura se inscribe en una esfera de 2 metros de radio (Vea la figura 113). Halle el volumen fuera del cono y dentro de la esfera.

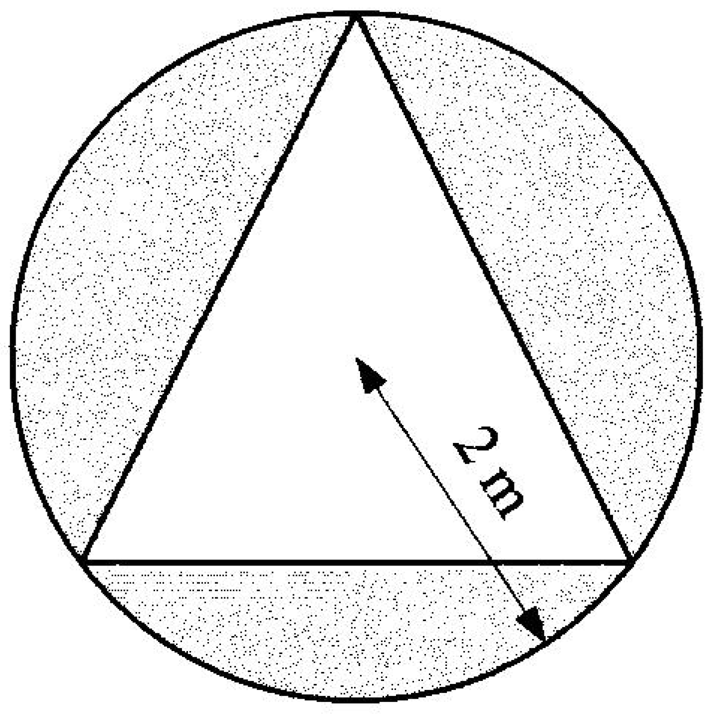

Figura 113

17. Un cilindro cuyo radio es igual a dos tercios de su altura se inscribe en una esfera de 5 metros de radio (Vea la figura 114). Halle el volumen fuera del cilindro y dentro de la esfera.

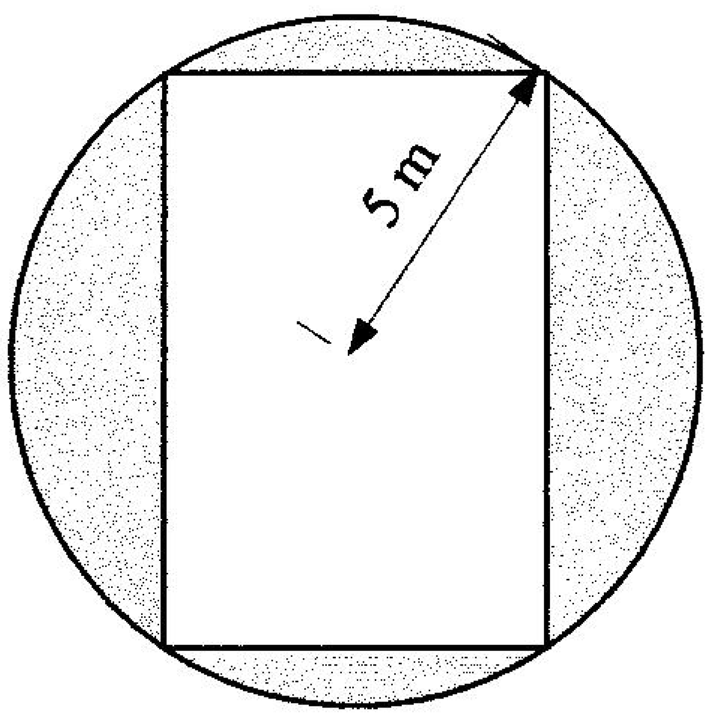

Figura 114

18. Un cono y una esfera descansan sobre una superficie plana (Figura 115). Determine a qué altura debe pasar un plano paralelo a la superficie de modo que al cortarlos, resulten círculos de igual radio. El diámetro de la esfera es igual al diámetro y altura del cono, todos de 10 cm.

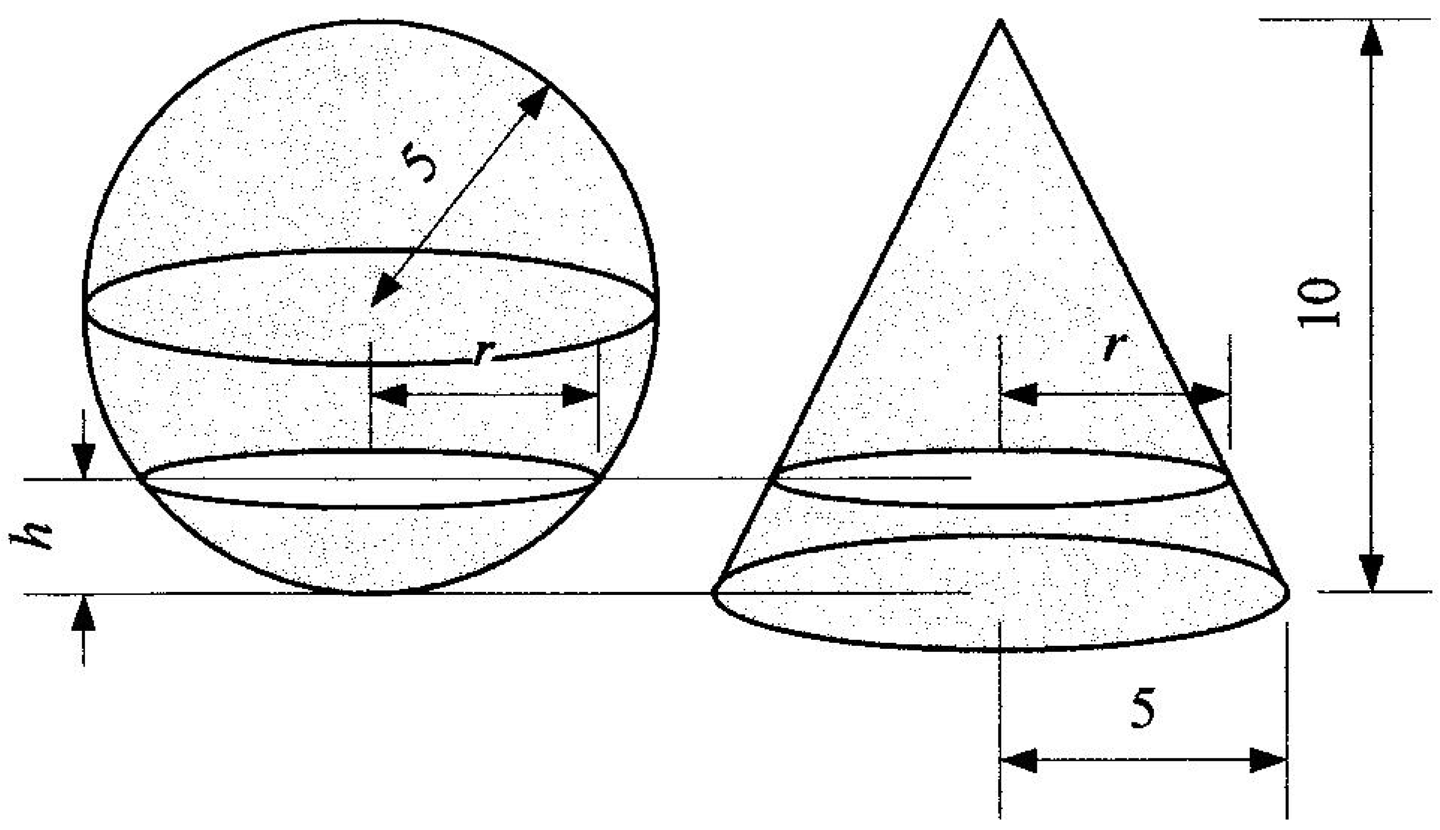

Figura 115

19. Un cono cuya altura es el cuádruple de su radio se circunscribe a un cilindro 1 metro de radio y 2 metros de altura (Vea la figura 116). Halle el volumen fuera del cilindro y dentro del cono.

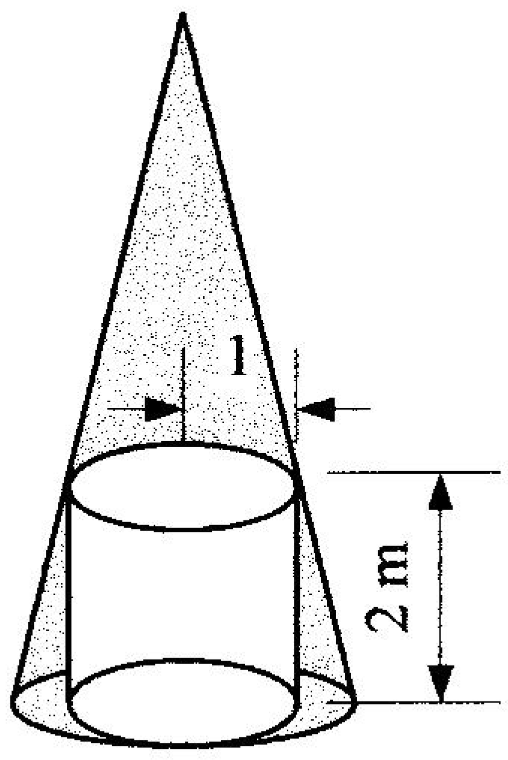

Figura 116

20. Obtenga una fórmula para el volumen de un cono truncado de radio mayor R, radio menor r y altura h (Figura 117).

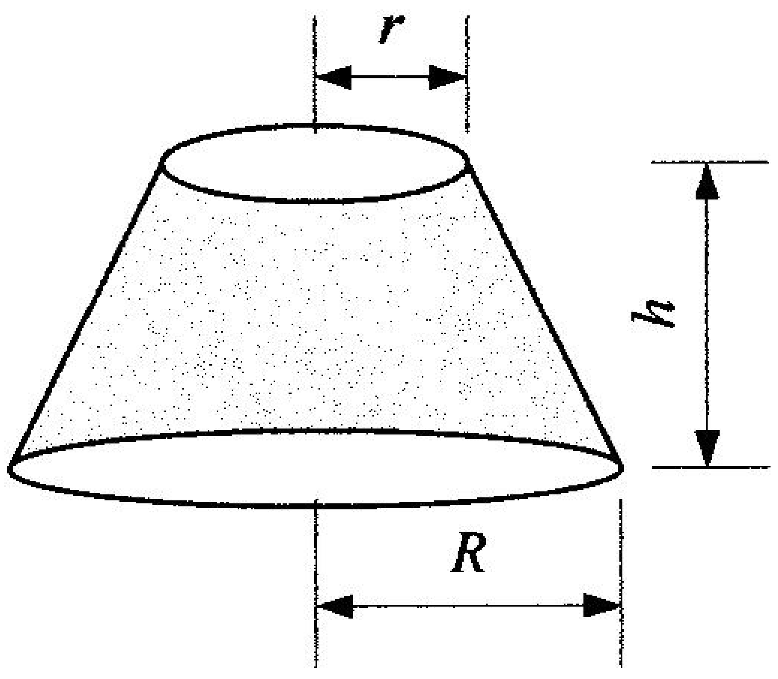

Figura 117

21. A razón de 1.5 m^3/min entra agua a un tanque cilíndrico de 2 m de radio y 4 metros de altura (Vea la figura 118). A partir de ello, obtenga:
a) La capacidad del tanque.
b) El tiempo de llenado.
c) La altura para que el volumen de agua se de 12π m^3

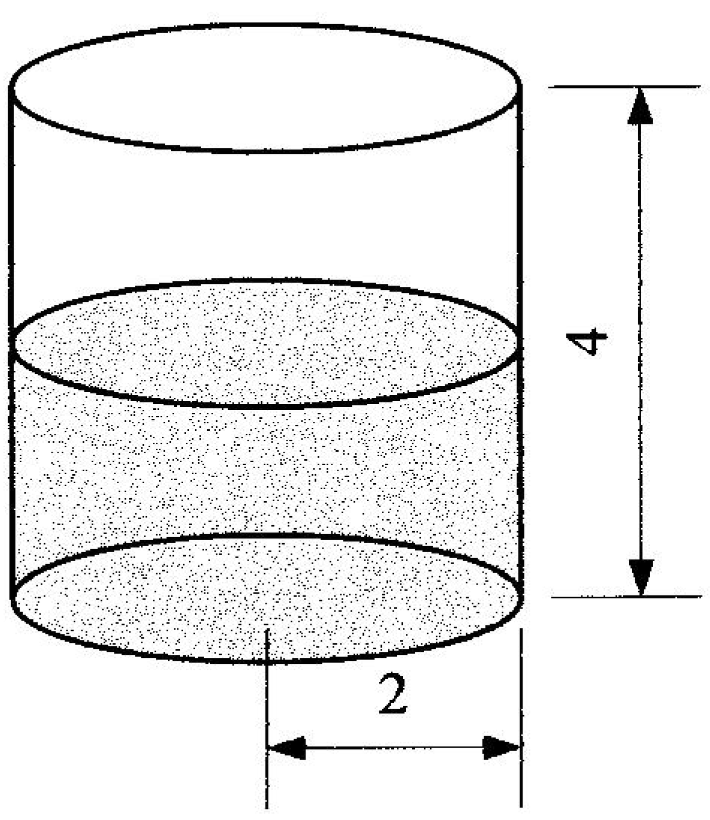

Figura 118

22. Un tanque cilíndrico de 3 metros de radio y 5 metros de altura descansa en posición horizontal (Vea la figura 119). El tanque inicialmente se encuentra vacío y en ese momento fluye agua hacia su interior. Halle el área del espejo de agua cuando la altura es de 1m.

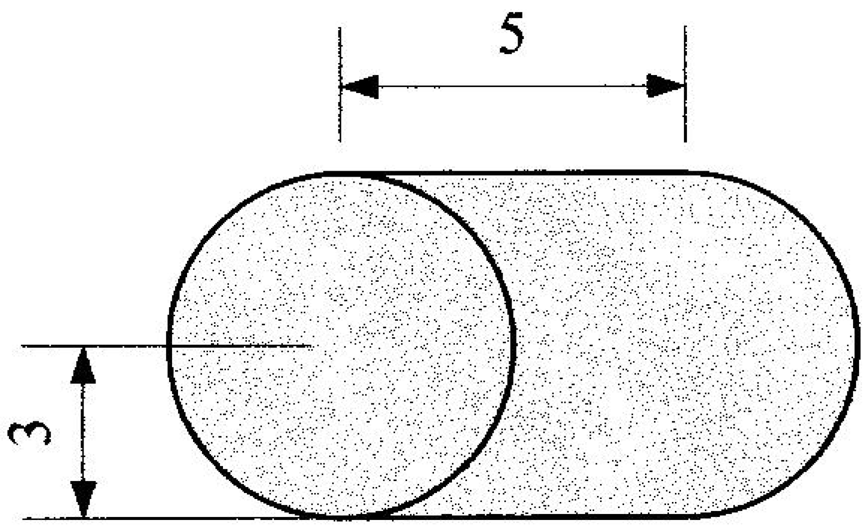

Figura 119

23. Un tanque esférico tiene 3 metros de radio e inicialmente se encuentra vacío. En ese momento se abre una llave y comienza a fluir agua hacia su interior. Halle el área del espejo de agua cuando la altura es de 1.5 m.

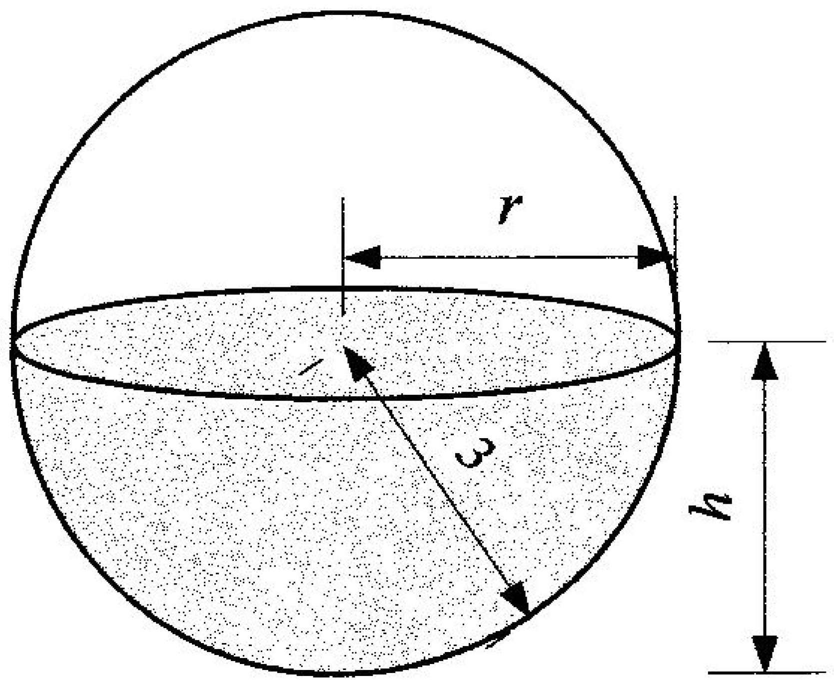

Figura 120

24. Un tanque tiene la forma de un cono invertido de 2 pies de radio y 4 pies de altura. El tanque inicialmente se encuentra vacío y en ese momento fluye agua a su interior a razón de 0.6 pie^3/min. Determine:
a) La capacidad del tanque.

b) El tiempo de llenado.

c) El volumen de agua cuando la altura es de 2.5 pies.